

二 圆



(一) 单元教学目标

1. 通过观察、操作等活动,认识圆和扇形,了解圆的特征;会用圆规画圆,并能利用圆设计一些简单的图案,进一步发展空间观念。
2. 经历圆的周长与面积计算公式的探索过程,掌握圆的周长与面积的计算方法。
3. 能解决生活中与圆的周长和面积有关的简单实际问题,在问题解决的过程中体会所学知识与现实生活的紧密联系,从中体验到学习数学的愉悦。
4. 在探索圆的周长和面积计算公式的过程中,培养学生的归纳、类比能力,进一步培养学生的探索精神和初步的探究能力。
5. 通过对我国古代杰出的数学家——祖冲之的介绍,使学生受到热爱祖国和热爱科学的教育。



(二) 单元内容分析

本单元教学内容包括单元主题图、圆的认识(包括扇形)、圆的周长、圆的面积、整理与复习、数学文化以及综合与实践。

本单元是在学生已经初步认识了圆和一些直线段围成的平面图形,知道周长和面积的意义,会计算部分图形的周长和面积的基础上进行教学的。教科书特别重视学生的操作探究活动,通过对圆的认识、圆的周长和面积的研究,使学生初步认识研究曲线图形的基本方法。同时,也渗透了曲线图形与直线图形的关系,扩展了学生的知识面,丰富了平面图形的内容,在数学活动中发展学生的空间观念。

圆的认识,从生活中一些常见物体上的圆入手去认识圆,在动手操作中去认识圆各部分的关系、圆的特征。学生对圆不陌生,也可能有过画圆的经历,但可能没有用圆规画圆,更没有看出圆内还有与圆密切相关的圆心、半径、直径等。通过观察生活中的圆,用多种方法画圆,让学生比较圆与已学过的平面图形的异

同,又通过做一做、议一议、折一折、量一量等操作活动,让学生认识圆各部分的名称和特征;在课堂活动和练习中也设计了一些画、折、剪等操作活动,加强学生对圆的直观体验。

圆的周长,从学生好奇的“滚铁环”引入,大小不等的铁环滚一周的距离是不等的,也就是它们的周长不等。在探索圆的周长与它的直径的关系时,教科书非常重视学生的操作活动,选择活动材料注重真实性(每个学生用来探索的材料可以不一样),操作方式注重多样性(绕线、沿直尺滚动),操作注重过程性(实验、记录、计算等)。

圆的面积,特别注重学生对如何计算圆的面积、圆的面积与哪些因素有关的探究活动。教科书设计了猜测、验证、再实验的方式,从多个角度去探究圆的面积与半径的关系,最终得出圆面积的计算公式。很明显,教科书把运用公式解决问题放在次要地位,凸显了图形与几何的教学本质。

数学文化“我国古代杰出的数学家——祖冲之”的介绍,激发学生进一步对数学产生兴趣,热爱祖国;综合与实践“读故事 学数学”是一个体现学科间综合的实践性学习活动,培养学生在学习与其他学科的学习中,也能用数学的眼光去发现问题、思考问题、提出问题。

[单元教学重点] 通过操作活动认识圆,推导圆的周长和面积计算公式,发展学生的空间观念。

[单元教学难点] 理解圆的周长与直径的倍数关系、理解圆的面积与半径平方的关系。



(三)单元教学建议

1. 加强操作活动,给学生的思维提供表象支持。

本单元的教学要加强学生的操作活动,要用学生的操作来为他们的思维提供表象支持。教学中一是要给学生提供充足的操作实物和学具;二是要留给學生比较充分的操作时空;三是要引导学生边操作边思考,使学生的操作活动成为有意义的学习活动;四是要把操作活动与合作学习相结合,使学生互相交流,互相补充,互相完善,并在操作活动的支持下总结出圆的特征以及周长和面积的计算方法。

2. 突出探究活动,让学生经历计算公式的推导过程。

为了帮助学生实现把数学知识结构转化成数学认知结构,教学时要突出学

生对知识的探究过程。通过对多个圆的周长和它的直径的测量并算出周长和直径的比值,探索出圆的周长与直径之间的关系,从而推导出圆的周长的计算方法;通过把圆分成若干等份后,拼成一个近似的平行四边形,从而推导出圆的面积的计算方法。教师要注意对学生的操作、分析、归纳等过程进行必要的指导。

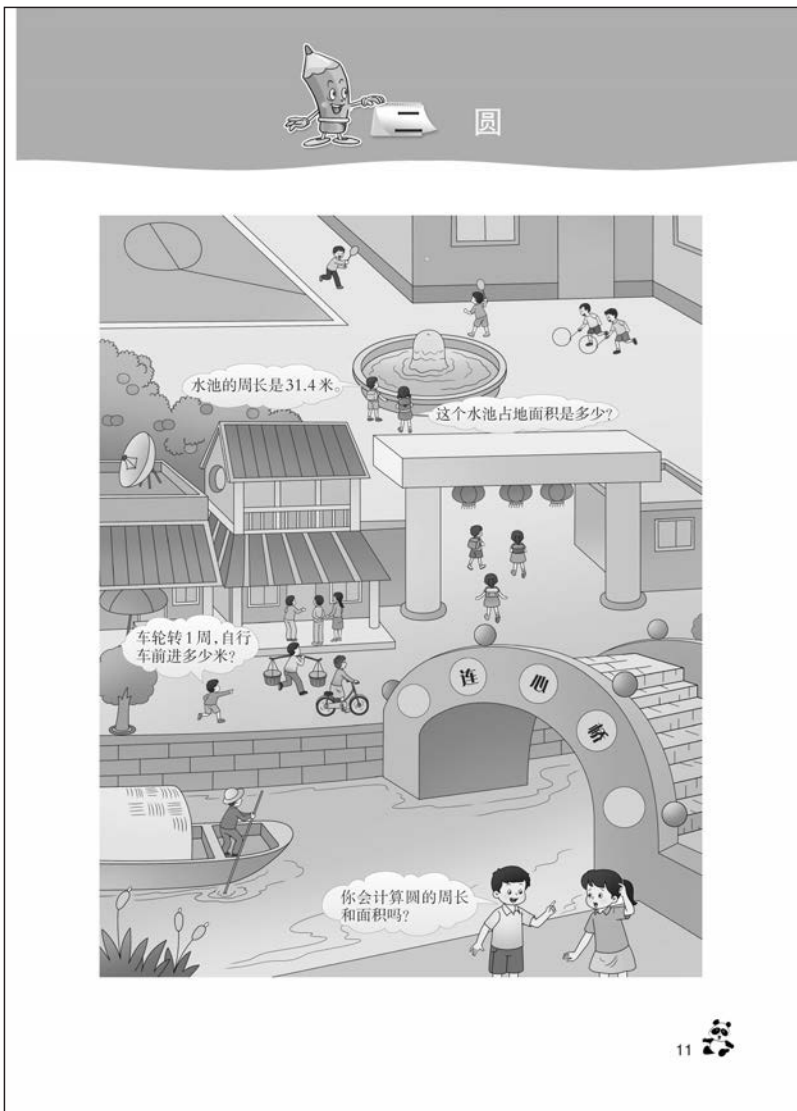
3. 围绕发展学生空间观念展开教学。

传统几何知识的教学是重结论,轻过程;重周长和面积的计算,轻对空间观念的培养。《标准》则要求“几何与图形”的教学中要注重所学内容与现实生活的联系,注重让学生经历观察、操作、推理、想象等探索活动,以达到把“空间与图形”的学习过程变成有趣的、充满想象的和富有推理的活动,发展空间观念。因此,本单元的教学要借助操作给学生探索圆的有关知识提供表象支撑,同时在圆的认识和周长、面积计算方法的探索过程中,使学生的空间观念切实得到发展。

4. 注意渗透数学方法,拓展学生数学思维。

结合相关内容适当蕴含一些数学思想和方法。比如,在探索圆的周长计算公式时,通过测量与计算几个不同圆的周长与直径的比值,从而发现圆的周长总是直径的3倍多一些。这种从一个或几个(但不是全部)特殊情况得出一般性结论的归纳推理方法就是不完全归纳法。它是发现规律、探求结论的一种重要手段。又比如,在探索圆的面积计算公式时,通过把一个圆分成若干等份后,然后拼成一个近似的平行四边形,从而推导出圆的面积计算公式,这就蕴含了转化的数学方法。通过学生想象继续把圆这样等分下去,如果分的份数越多,那么拼成的图形就越接近平行四边形,平行四边形的高就越接近圆的半径,这就是一种极限的数学思想。这些重要的数学方法与思想,对拓展学生的思维和促进数学学习是很有益处的。

第1节“圆的认识”由单元主题图、4个例题、2个课堂活动和练习三构成。建议用2课时教学。第1课时教学例1、例2,完成第13页课堂活动和练习三第1、2题;第2课时教学例3、例4,完成第14页的课堂活动和练习三第3~6题。



★单元主题图呈现的是学生所熟悉的校园及周边环境的情境图,目的是为了让学生从熟悉的生活环境中感受到圆、圆的周长、圆的面积在实际生活中的应用。通过单元主题图,一方面要激发学生学习的欲望,让学生以积极的心态投入到本单元的学习之中;另一方面要让学生体会到本单元知识与现实生活的密切联系,增强学生的应用意识。

教学时,或将主题图制成幻灯片,或制成较大的教学挂图,或让学生观察课本。首先让学生观察整图,提问:图中哪些图形比较多?再一个局部一个局部地去观察,可以让学生试着想一下,这个单元,我们可能会去研究圆的哪些知识?可能会用到哪些方法去研究?

★例1 呈现生活中常见的带有圆的物体作为观察对象,让学生根据它们的共同特征抽象出圆的平面图形。通过圆规的“自我介绍”,认识画圆的工具,学习用圆规画圆的方法。

教学时,首先让学生观察书中3个带有圆的物体,让学生指出圆在哪里;说一说生活中还有哪些地方有圆。在学生充分发表自己意见的基础上,教师可在黑板上画出一个圆并提问学生:老师画的这个圆能代表你们刚才所说的这些圆吗?这个过程也就是学生从实物中抽象出圆这个平面图形的过程,接着让学生想办法在纸上画一个圆。一方面加深学生对圆的直观认识,另一方面使学生知道借助工具画圆的方法。然后,通过圆规的“自我介绍”,知道画圆的工具一般是圆规以及如何用圆规画圆。在此基础上,教师边示范边向学生说明用圆规画圆的步骤和方法,接着让学生用圆规画几个圆。最后,让学生把自己所画的圆和长方形、正方形、三角形等几何图形进行比较,用自己的语言描述什么是圆(不给圆下定义)。

圆的认识

1 说一说,画一画。



可以用圆规画圆。

我是圆规,我的一只脚固定在一个点上,另一只脚绕着这个点旋转1圈,就画出了一个圆。




2 认识圆。



画圆时,固定的点是圆心。圆心一般用字母 O 表示。圆心到圆上任意一点的线段是半径,一般用字母 r 表示。通过圆心并且两端都在圆上的线段是直径,一般用字母 d 表示。

议一议 圆心到圆上任意一点的距离相等吗?

任意画一个圆,剪下来对折几次,量一量,比一比,你能发现什么?

圆的直径有无数条。

在同一圆里,直径的长度是半径的……

在同一圆里,所有半径的长度……

圆是轴对称图形,每条直径所在的直线都是圆的对称轴。

$$d = 2r \text{ 或 } r = \frac{d}{2}$$


★例2 是认识圆各部分的名称和圆的特征。教科书用陈述方式告诉学生,圆各部分的名称;引导学生在动手操作、讨论中去发现圆心和半径各自的作用、直径与半径的关系、圆的直径和半径都有无数条、圆是轴对称图形等特征。

教学时,尽量让每个学生都操作起来、讨论起来。接着例1的画圆教学,在学生画圆的基础上,告诉学生圆心、半径、直径的概念,并让学生在自已画的圆里标记出圆心、半径、直径,体会它们各自的作用。然后用一张大一些的纸任意画一个圆,并把它剪下来,在折一折、量一量、说一说等活动中发现圆的一些特征。先让学生独立去发现,再在组内讨论、交流,从而发现圆的直径和半径都有无数条,在同一圆里,所有的半径和直径的长度都分别相等,直径的长度是半径的2倍,得出 $d = 2r$ 与 $r = d \div 2$ 、圆是轴对称图形等特征。

课 堂 活 动

1. 用圆规画圆。

(1) 画几个圆心在同一点而半径不相等的圆;画几个圆心不在同一点而半径相等的圆。

(2) 画半径为2.5cm的圆,用字母标出圆心、半径和直径。

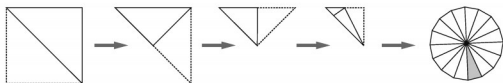
2. 分别画出下面两个圆的一条对称轴。



一个圆有几条对称轴呢?



3. 用一张正方形纸,按下图那样尽量对折数次后,剪成一个等腰三角形,展开后得到一个怎样的图形呢?



3

看一看,认一认。



$\angle 1$ 的顶点在圆心,这样的角是圆心角。圆上两点之间的部分叫做弧。由圆心角的两条边和圆心角所对的弧围成的图形是扇形。在同一个圆中,扇形的大小与这个扇形的圆心角的大小有关。



这3个圆中涂色部分都是扇形。



找一找这3个扇形的圆心角和它所对的弧。



13

★课堂活动第1题,让学生在画圆的过程中进一步体会圆心、半径的作用。教学时,第1题第(1)小题在学生画圆后,提问学生:通过画这两组圆,你再一次明白了什么?(圆的位置是由圆心决定的,大小是由半径决定的。)

★第2题巩固圆的对称性特征,应让学生明白圆有无数条对称轴,画对称轴沿直径画,两端可以延伸到圆外。

★第3题通过操作活动,体会曲直的辩证关系,进一步建立起圆的空间观念,巩固对圆的特征的认识。让学生选择薄一点的纸折,初步感受对折次数越多,剪出来的纸的边缘越圆滑,也就是越接近一个圆,为推导圆的面积计算公式打下基础。

★例3是初步认识扇形,其目标是只要在圆中能找出扇形并指出扇形的圆心角、半径、弧即可,不对扇形的特征作深入认识。

教学时,可以设置情境,将一把普通纸扇贴于黑板,把纸扇所在的圆补充

完整,取走纸扇所留下的部分,顾名思义就叫扇形。在此基础上,告诉学生圆心也就是扇形的圆心,圆的半径也就是扇形的半径,比圆要多两个概念,即是两条半径所夹的角有一个特点就是角的顶点在圆心,所以叫圆心角,圆心角所对圆的这一部分叫弧。学生对圆心角和弧有了认识后,提出问题:在同一圆中,扇形的大小与什么有关?还可以让学生进一步思考:在不同的圆中,扇形的大小又与什么有关呢?(与圆心角的大小和半径的长短有关。)教学时要注意,圆心角所对的弧是两部分,所以,一定要让学生找出是哪一个圆心角所对的弧。

★例4通过用圆与圆、圆与其他图形进行组合设计图案,旨在进一步理解圆的特征,体验图形的美、数学的美,激发学生学习数学的兴趣。该例题有2组活动,一是用圆或者圆与其他图形进行组合变换,设计优美图案;二是在正方形中设计用线段绕成圆的图案,让学生感受直线绕成圆的神奇,也可以让学生了解圆周可以近似地看成是由许多小线段(点)连成,渗透了极限的思想。

教学时,可以先让学生欣赏含圆的优美图案,并发表自己的看法。接着让学生观察例4中的图案,想一想:这些图案中有哪些几何图形?是怎样画出来的?然后互相说一说画这些图案的方法,再试着画这些图案,并涂上颜色,还可以进行展示交流,感受通过不同的圆进行组合可以设计出美的图案,让学生在画的过程中受到美的教育。教学中,尽量让学生设计有趣的图案,培养学生的想象力。

教学“在正方形中,设计用线段绕成圆的图案”时,应让每个学生都准备一张边长12cm的正方形白纸板。教学时问学生:用直线能画出圆来吗?接着让学生观察正方形图,思考:每边是怎样等分的,每边的数又是怎样排列的,每条线段连接的顺序又是怎样的。同时,教师可以在黑板上进行必要的示范,然后学生独立设计用直线绕成圆的图案。其目的是让学生感受到直线通过适当的组合也能变成近似的圆,以及让学生了解圆周可以近似地看成是由许多小线段(实际是一些点)连成的。

★课堂活动第1题,教学时,首先让学生观察这两个图形是否是对称图形,再找圆心和直径。第1个图中圆的直径就是其内接正方形的对角线,圆心就是内接正方形两条对角线的交点;第2个图中正方形的对角线就在对称轴上,圆的直径就是对角线的圆内部分。

★第2题是开放性练习,对设计图案没有具体要求,不同的学生可以设计出不同的图案,只要学生设计时用到了圆规等学具,图案中有圆这个图形要素就可以了。

7.4 设计图案。

在正方形中,设计用线段绕成圆的图案。

把正方形的每边分成相同的等份。按1-1,2-2,3-3,……,6-6画线段。

接着绕下去,能绕出一个圆吗?

课 堂 活 动

1. 找出下面每个圆的圆心和直径,在其中一个圆内画出扇形。

2. 以圆规为主要工具,设计你喜欢的图案。

我设计出了这几种图案,你呢?

14

练习三

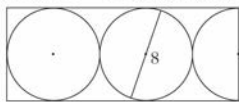
1. 用彩色笔描出下面各圆的半径和直径,并量出长度。



2. 填表。

	圆一	圆二	圆三	圆四	圆五
$r(m)$	3	0.8			2.5
$d(m)$			6.4	3.6	

3. 看图,在()里填合适的数。(图中单位:cm)



圆的半径是()cm,
长方形的宽是()cm,
长方形的长是()cm,
长方形的面积是() cm^2 。

4. 在下列图形中,你能分别画出几条对称轴?画一画。



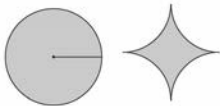
5. 下列各圆中,阴影部分是否是扇形?是扇形的标出圆心角、半径和弧。



6. 试一试:找一个圆形物品,量出圆的直径。



张大妈是一位巧裁缝。她用两块边角料(如右图),通过剪拼,就奇妙地拼成了一张正方形桌布。你知道张大妈是怎样剪拼的吗?



15

★练习三有6道题和1道思考题,主要是为巩固圆和扇形的认识而设计的。没有设计配合例4的题,教师可根据情况补充。

★第1题巩固认识圆的直径和半径,可让学生独立完成,用不同颜色描出半径和直径,把量出的长度标在半径或直径旁。注意直径也是两条半径。

★第3题是培养学生识图的能力,找到长方形与圆的关系(长方形的宽与圆的直径相等,长等于5个半径的长度之和),由直径8cm得到长方形的长、宽和面积。教学时,先让学生独立观察,再交流观察的方法,最后完成填空。

★第4题进一步认识对称图形,有几条对称轴对有的学生有些难度,让学生学会找对称轴的方法很重要,把图形对折或者在脑中想象对折。如果有的学生有难度,就要求他只要找到1条对称轴就可以了。4个图形分别有无数条、1条、2条和3条对称轴。

★第5题巩固对扇形的认识,练习时,不仅要能指出扇形,还要能指出它对应的半径、圆心角和弧。在同一圆内,一个扇形的反面就是另一个扇形。

★第6题主要是让学生进一步知道圆内最长的线段就是直径。练习时,可以画出这个圆,对折后找到直径,也可以用直尺在圆内移动到最长时,这条线段就是直径。

★思考题可以让学生尽量去讨论,培养学生的识图能力、空间想象能力。练习时,可以引导学生去思考两个图形的关系,想一想怎么补成一个正方形。如果有的学生想象不出来,还可以准备两张这样的图纸,让学生去折、去剪。该题可以有两种拼法,把第一个图平均分成4份,去与第二个图拼;或者把第二个图平均分成4份,去与第一个图拼。

第2节“圆的周长”由3个例题、1个课堂活动和练习四构成。建议用2课时教学。第1课时教学例1及课堂活动第1题、练习四第1~3题；第2课时教学例2、例3、课堂活动第2、3题、练习四第4~7题。

★例1的重点是让学生探索圆的周长与直径的关系,得出圆的周长计算公式。教科书采取实验的方法,引导学生测量收集的圆形物品的周长和直径,通过测量出多个不同的圆的周长和直径,并算出周长除以直径的商,发现“圆的周长总是直径的3倍多一些”这个规律,从而揭示圆周率并得出圆的周长计算公式 $C = \pi d$ 或 $C = 2\pi r$ 。例题对实验素材的选择是开放的,学生能收集到什么就测量什么,同时,告诉了学生测量圆的周长和直径的一些方法,给出了实验所需要的表格。

(1)出示教科书上的情境图,讨论“铁环滚一圈的距离”指的是圆的什么,从而知道圆的周长的意义。

(2)实验操作,探索圆的周长与直径之间的关系。接着前面讨论的问题,让学生大胆猜想,圆的周长与圆的什么有关?圆的周长和直径到底有怎样的关系?从实验中去获得,提示学生按照书上介绍的方法测量出自己带来的几个大小不同的圆的周长和直径,并将周长除以直径的商填入表格中(可以使用计算器)。在这个过程中要让学生想一想怎样测量圆的周长。用线(或纸条)

绕圆一周,或者把圆形物品放在直尺上滚动一周,都可以量出圆的周长(最好用mm作计量单位)。通过观察表格中的商(教师可以将多个学生的数据放在一起让学生观察),使学生发现“圆的周长总是直径的3倍多一些”这一事实,从而说明圆的周长除以它的直径的商是一个固定的数,把它叫作圆周率,用希腊字母“ π ”来表示。教师要说明 π 是一个无限不循环小数,在计算时,一般取它的近似值“3.14”。

(3)引导学生阅读单元末的数学文化“我国古代杰出的数学家——祖冲之”,了解祖冲之在这方面的伟大成就,使学生受到爱国主义教育。

(4)总结圆的周长计算公式。让学生在前面学习的基础上,总结出 $C = \pi d$ 或 $C = 2\pi r$ 。

圆的周长

量一量,算一算。
找几个大小不同的圆形物品,量出圆的直径和周长。

这枚1元硬币的直径是2.4厘米。

用线绕圆1周,就可以量出它的周长。

量出的结果填入下表中。

	1元硬币			
圆周长				
直径				
圆周长除以直径的商 (保留两位小数)				

圆的周长总是直径的3倍多一些。圆的周长除以直径的商是一个固定的数,把它叫做圆周率,用希腊字母 π (读pài)表示。
 π 是一个无限不循环小数,计算时,通常保留两位小数,取3.14。如果用 C 表示圆的周长,那么 $\frac{C}{d} = \pi$,得 $C = \pi d$ 或 $C = 2\pi r$

- 例2 自行车车轮的外直径是0.71m。车轮转1周,自行车前进多少米?(得数保留两位小数。)



$$3.14 \times 0.71$$

$$=$$

$$\approx$$

0.71的3倍多一些,应比2.1大。



答:自行车约前进()m。

例3



解:设水池的直径是 d m。根据 $C=\pi d$ 得

$$3.14d = 31.4$$

$$d =$$

$$r =$$

先求出水池的直径,再求半径。

还能怎样算?

答:这个水池的直径是()m,半径是()m。

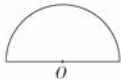
课堂活动

1. 议一议:哪个图形的周长长一些?是怎样比的?



2. 测量一个圆形物品上圆的周长,再算出它的直径和半径。

3. 量出下面图形中有关线段的长,再计算它们的周长。



17

★例2是利用圆的周长计算公式解决简单的实际问题。

教学时应让学生独立解决,重在引导书写格式及注意事项。一是可以不写出公式,直接列式计算;二是 π 取两位小数为3.14,已作为一般数值处理,不要再看作近似数了,第一步计算不用“ \approx ”;三是计算结果要求保留两位小数,最后一步用约等于符号“ \approx ”;四是教师要引导学生根据“圆的周长总是直径的3倍多一些”这个规律,用估算来检验结果是否正确,培养学生良好的检查习惯。

★例3是继续利用圆的周长计算公式解决问题,这里主要用列方程的方法来解决,使学生体验用公式去寻找问题中的等量关系的方法,提高学生用方程解决问题的能力。

教学时,首先引导学生回忆圆的周长计算公式,再根据 $C=\pi d$ 找等量关系,设水池的直径为 d ,根据 $C=\pi d$ 列出方程 $3.14d=31.4$,最后解方程,并求出半径。解答时,要注意书写格式,让学生说一说每一步的含义。算完直径以后,仍然要引导学生根据“圆的周长总是直径的3倍多一些”这个规律用估算检验结果是否正确。根据学生实际情况,也可以直接列出算式 $31.4 \div 3.14$ 来解决。

★课堂活动第1题,重点引导学生意识到,正方形的周长是边长的4倍,圆的周长是直径的3倍多,从这个角度去比较这两个图形的周长,很容易得出结果。

★第2题是例1的延续。练习时,学生测量这个圆形的周长既可以用围的办法,也可以用滚动的办法;算直径时,使用计算器得出近似值就可以了(测量时最好用mm为单位)。

★第3题是计算圆的变式图形的周长,首先判断它与圆的关系,再思考计算这个图形的周长需要什么条件,最后才去测量相应线段的长度。计算后可以引导学生去讨论:半圆的周长是不是圆的周长的一半?四分之一圆的周长是不是圆的周长的四分之一?

★练习四共7道练习题和1道思考题。第1~3题是已知直径或半径,求周长的基本问题;第4、5题是知道周长,计算直径的问题;第6、7题是有关圆的周长的一些综合性练习。

练习时,所有练习题都应该让学生独立完成,如果练习中有困难,教师可以做适当引导与提示。

★第3题中分针的尖端走1周的路程是圆的周长,分针的长正好是这个圆的半径。

★第4、5题都是知道圆的周长,计算直径的问题。练习时,可以用圆的周长计算公式列方程,也可以直接列出算式进行计算。

★第6题要让学生弄清数量关系,独轮车所走过的钢丝长度是独轮车车轮的周长乘转动的周数,根据这道题的已知条件,先要计算车轮的周长。

★第7题,学生在解决时最容易出错的是把延伸后的圆的直径算成 $10+2$ 。引导学生观察图,找出延伸后的圆的直径。把这个圆形展区的半径向外延伸2m仍然是一个圆,这个圆的直径是 $10+2+2=14$ (m),或者半径是 $10\div 2+2=7$ (m)。

★思考题,在学生不能独立解决时,教师引导先假设正方形的边长为2(当然也可以是其他数),也就是圆的直径是2。再让学生理解,这两只蜜蜂分别沿着阴影部分的边缘爬1次,所爬的路线分别指哪些线。第1只蜜蜂所爬路程是正方形的周长加上一个直径为2的圆的周长,第2只蜜蜂所爬的路程也是正方形的周长加一个直径为2的圆的周长,从而得出两只蜜蜂所爬的路线一样长。

练习四

1. 填表。

半径(cm)	直径(cm)	周长(cm)
4.5		
	16	

2. 量得一块“禁行”的交通标志牌(如右图)的直径是50cm。这块标志牌的周长是多少厘米?



3. 石英钟的分针尖端到钟面中心的距离是15cm。该分针转动1周,它的尖端走过的路程是多少厘米?

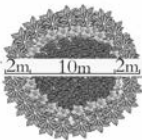
4. 在一棵大树的1.2m高处,量出树干的周长。



5. 国庆活动中,要做一批铁环。如果每个铁环用1.5m长的铁条做成,那么铁环的直径是多少米?(得数保留一位小数。)

6. 杂技演员表演独轮车走钢丝,车轮直径是0.6m。走过47.1m长的钢丝,车轮要转动多少周?


7. 在花博覽会上,把一个直径为10m的圆形展区的半径向外延伸2m变成一个新的圆形展区。那么这个新展区的周长是多少米?



两只蜜蜂分别沿着涂色部分的边缘爬1次,哪只蜜蜂爬过的路线长?(两个正方形的边长相等。)





第3节“圆的面积”包括1个情境图,6个例题,2个课堂活动和2个练习。建议用5课时教学。第1课时教学例1、2,完成第21页课堂活动第1题和练习五第1、2题;第2课时教学例3、4,完成第21页课堂活动第2、3题和练习五第3、4题;第3课时为练习课,完成练习五第5~8题;第4课时教学例5,完成第24页课堂活动第1题和练习六第1、2题;第5课时教学例6,完成第24页课堂活动第2题和练习六第3~5题。




圆的面积

云南景洪的曼飞龙白塔的塔基为圆柱形石座,底面周长是42.6米。






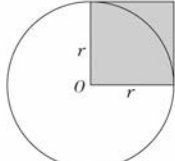
这座塔的塔基占地多少平方米?




1 以正方形的边长为半径画一个圆,圆面积是正方形面积的几倍?

正方形面积是 $r \times r = r^2$ 。




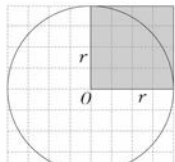


圆面积比2个正方形面积大,比4个正方形面积小,比3个正方形面积呢?




利用方格纸数一数。






正方形面积有16格。
 $\frac{1}{4}$ 圆面积约约有13格。



圆面积比正方形面积的3倍多一些,也就是比半径平方(r^2)的3倍多一些。



19

★例1是通过估一估、数一数得出圆的面积是半径平方(r^2)的3倍多一些,使学生感受到圆的面积与 r 有关。教科书呈现的是一个圆和以其半径为边长的一个小正方形,通过观察,发现圆的面积比4个小正方形面积之和小,就是比 $4r^2$ 小。再观察,发现圆的面积比3个小正方形面积之和大一些,也就是比半径平方(r^2)的3倍大一些。这个观察、比较过程对推导圆面积计算公式十分重要。

教学时,从情境图引入,可以用多媒体课件展示云南景洪的曼飞龙白塔,也可以让学生直接翻书看图。塔基的底面周长是42.6m,通过“这座塔的塔基占地多少平方米”,让学生知道塔的底面是一个圆,引出圆面积的学习。此时可以让学生说一说圆的面积是指的什么,归纳出圆所占平面的大小,就是圆的面积。

教学例1时,教师可以在黑板上画一个如第一个图所示的一个圆和一个小正方形,让学生估一估圆的面积大约是小正方形面积(r^2)的多少倍,让学生经历定性感知到定量感知的过程。圆的面积比 $4r^2$ 小,又比1个小正方形面积大,比2个小正方形面积大,而与3个小正方形面积相比,就不能一眼看出是圆的面积大还是3个小正方形面积大,于是就用数方格的方法将 r 平均分成4份,就在小正方形内画出16个方格,于是得到第二个图。可以让学生数一数,小正方形有16格, $\frac{1}{4}$ 个圆大约有13格(非常接近1格的算1格,其余不足1格的算半格),圆的面积大约就有52格,52就是16的3倍多一些,由此得出圆面积是小正方形面积的3倍多一些,也就是半径平方(r^2)的3倍多一些。

★例2是在例1估测的基础上,进一步用实验的方法探索圆的面积计算公式。如何把圆转化成已学过的图形来计算圆的面积呢?教科书把圆分割成若干等份,再拼成一个近似的长方形,然后由长方形的面积计算公式推导出圆面积的计算公式 $S = \pi r^2$ 。这里涉及极限思想,如果等分的份数越多,那么拼成的图形就越接近长方形,长方形的高就越接近圆的半径。

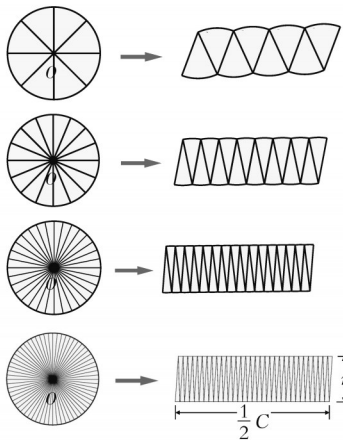
教学时,要求学生课前准备一个较硬的圆形纸板作学具,并将圆等分成8份或16份。从例1已经发现圆的面积是半径平方(r^2)的3倍多一些,那么究竟比3倍多多少呢?能不能再通过实验来进行定量的研究?于是,引出学生实验(教师可引导学生回忆平行四边形、三角形和梯形面积计算公式的推导过程),接着让学生按照教科书上的图,将圆剪开后,拼成一个近似的长方形。在学生基本上都剪拼出了长方形后,教师展示分成32等份的教具拼成的长方形(还可以利用多媒体展示平分成8份、16份、32份、64份后拼成的长方形),把拼成的图形加以比较,使学生看到分的份数越多,每一份就会越细,拼成的图形就会越近似于长方形。最后,

让学生充分讨论并得出圆的面积计算公式。①讨论圆的面积与拼成的长方形的面积的关系,由于在拼接的过程中,图形的面积没有发生变化,也就是圆的面积等于这个拼成的近似长方形的面积;②讨论圆各部分与拼成的长方形各部分的关系,分析、比较长方形的长与宽和原来的圆的周长与半径之间的关系,这个近似长方形的长相当于圆的周长的一半,即 $\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\pi r \times 2 = \pi r$,平行四边形的宽就相当于圆的半径 r ;③概括圆的面积计算公式,圆的面积等于长方形的面积,而长方形的面积=长 \times 宽 $=\pi r \times r$,所以圆的面积 $=\pi r \times r = \pi r^2$,再次印证圆的面积是半径平方(r^2)的3倍多一些。

这里要特别说明一下,如果在推导圆面积计算公式的过程中,就用拼成平行四边形来推导,也是完全可以的,从极限思维看,无限分下去,这里的平行四边形也就成了长方形了。

★例3是运用圆的面积计算公式计算圆的面积的问题。教学时,基本可以放手让学生独立去解决,教师最多提醒学生注意 30^2 是表示 30×30 ,另外注意面积单位是 m^2 。

② 把一个圆分成若干等份后,像下面这样拼接。



把圆等分的份数越多,拼出的图形越接近于长方形。

议一议 这个长方形与圆之间有什么关系?

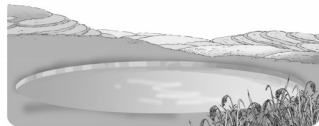
$$\begin{aligned} \text{长方形面积} &= \text{长} \times \text{宽} \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{圆面积} &= \frac{1}{2} C \times r \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

如果用 S 表示圆的面积,那么圆的面积计算公式就是: $S = \pi r^2$

③ 修建一个半径是30m的圆形鱼池,它的占地面积是多少平方米?

$$\begin{aligned} &3.14 \times 30^2 \\ &= 3.14 \times 900 \\ &= 2826(m^2) \end{aligned}$$

答:它的占地面积是2826 m^2 。



4 量得一张圆桌的周长是3.14m。这张圆桌的面积是多少平方米？

半径： $3.14 \div 3.14 \div 2 = 0.5(\text{m})$

面积：_____

= _____

= _____

答：这张圆桌的面积是() m^2 。

求圆的面积，要知道什么？



试一试 你能解决第19页上“塔基占地多少平方米”这个问题吗？

课 堂 活 动

1. 量出有关数据，并求出圆的面积。



2. 找一个圆形物品，量出圆的直径或周长，再算出面积。

3. 议一议，怎样在一张正方形纸上画出一个最大的圆？动手试一试。

练 习 五

1. 公园草地上的自动旋转洒水器的射程是8m。它能喷洒的面积是多少平方米？



2. 一个圆形水缸口的外直径为1m。现在为这个水缸做一个盖子，这个盖子的面积至少是多少平方米？

3. 填空。

半径(cm)	直径(cm)	周长(cm)	面积(cm^2)
	10		
4			
		56.52	

21



★例4是已知圆的周长求圆的面积的问题，必须先求出半径，再求面积。教学时，要启发学生思考：计算圆的面积需要什么条件？题目中给了什么条件？怎样将题目中的已知条件转化成求圆面积所需要的条件？因为题目中给出的条件是圆的周长，要按照公式 $C = 2\pi r$ ，先求出半径 r ，列式为 $3.14 \div 3.14 \div 2$ ；再利用公式 $S = \pi r^2$ ，让学生自己求出圆的面积。

★“试一试”是让学生解决本小节情境图中提出的问题，它与例4是同类问题。

★课堂活动第1题提示学生计算圆的面积需要什么条件，学生就会知道该怎么做了。

★第2题提示学生测量时取整数，厘米不行就用毫米作单位。

★第3题让学生独立去试，最后得出以边长为直径的圆就是最大的圆了。

★练习五的8道题中，大部分是基础训练题。练习时，只需要提示学生，要求圆的面积，只要找出它的半径是多少就行了。

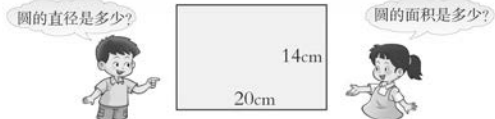
★第4题,用长方形纸剪出最大的圆,是以宽为直径的圆。

★第5题是既要计算圆的面积,又要计算圆的周长,可以让学生比较计算圆的周长和面积各要注意什么。

★第7题是知道正方形的周长计算它的面积,需要先求出边长,用周长除以4;知道圆的周长计算它的面积,需要先求出半径,用周长除以圆周率再除以2。还可以让学生比较,周长相等的线段,分别围成正方形和圆,谁的面积更大。

★思考题是把一个圆分成若干等份,拼成近似的梯形或三角形,推导圆的面积计算公式。结论是肯定的,可以推导出圆的面积计算公式。梯形的(上底+下底)正好是圆周长的一半,即 πr ,梯形的高是圆半径的2倍,即 $2r$ 。三角形的底正好是圆周长的四分之一,即 $\frac{1}{2}\pi r$,高是 $4r$ 。所以,都能够推出圆面积计算公式 $S = \pi r^2$ 。

4. 用下面这张长方形纸剪出一个最大的圆。



5. 北京天坛公园的新年殿是底部直径约24m的圆形大殿。它的占地面积是多少平方米?环绕新年殿的回音壁是一道圆形的水磨砖围墙,它内圆的半径是32.5m。回音壁内圆的周长是多少米?(π 取3。)



6. 王家村修了一个周长是251.2m的圆形蓄水池。它的占地面积是多少平方米?

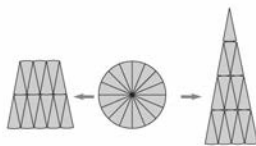
7. 用两根长度都是31.4cm的铁丝,分别围出一个正方形和圆。计算出它们的面积。



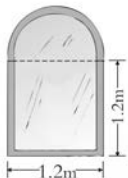
8. 求下图中阴影部分的面积。(图中单位:cm)



把一个圆分成若干等份后,拼成近似的梯形或三角形,可以推出圆面积计算公式吗?



- 5 学校阅览室的窗户上面是半圆,下面是正方形(如下图)。窗户的面积约是多少平方米?(得数保留整数。)



$$\text{半径: } 1.2 \div 2 = 0.6(\text{m})$$

$$\begin{aligned} \text{半圆面积: } & 3.14 \times 0.6^2 \div 2 \\ & = 3.14 \times 0.36 \div 2 \\ & = 0.5652(\text{m}^2) \end{aligned}$$

$$\text{正方形面积: } 1.2 \times 1.2 = 1.44(\text{m}^2)$$

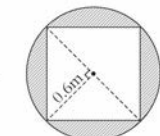
$$\text{窗户的面积: } 0.5652 + 1.44 = 2.0052 \approx 2(\text{m}^2)$$

答:窗户的面积约是 2m^2 。

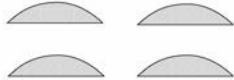
窗户的面积是1个半圆与1个正方形面积的和。



- 6 一张可折叠的圆桌,半径是 0.6m ,折叠后成了正方形。折叠部分的面积约是多少平方米?(得数保留两位小数。)



观察图形,折叠部分有4块,算出每块面积再相加,行吗?



23

★例5呈现的是上面是半圆下面是正方形的窗户平面图,求窗户的面积。这类问题在生活中比较常见,学生有这方面的生活经验,也有研究的价值。教科书通过一个小孩说:“窗户的面积是一个半圆与一个正方形面积的和”,实际上说出了解决这个问题的思路。

教学时,先引导学生识图并明确求各图形面积的已知条件,图的上部分是半圆,直径是 1.2m ,下部分是正方形,边长是 1.2m ;再明确如何计算面积,整个图形面积等于半圆面积+正方形面积,引导学生去找出计算面积所需要的条件;然后,分步列式计算面积,提示得数保留整数,过程中则不需要保留整数;最后,总结方法,像这种计算组合图形的面积,一般把它分割成几个学过的图形,分别求出各图形的面积后,再把它们的面积加起来。

★例6呈现的是学生在生活中经常见到的可以折叠的圆桌,求折叠部分的面积,对于学生来说有一定困难。但是,教科书上一是用对话方式把思考与


解决的过程介绍得比较清楚,二是用图形帮助理解,作为六年级学生一般是能够看得懂的。通过对这个问题的解决,要让学生学会整体思考的方法,折叠部分的面积是圆的面积与正方形的面积的差;学会转化的方法,如计算正方形的面积,习惯思维就是要找正方形的边长,而这里对小学生来讲,是找不出边长的长度的,结合图形看,把正方形转化为4个相等的直角三角形,知道直角三角形的直角边长度,就可以计算它的面积了。当然,还可以把这4个相等的直角三角形转化为2个边长是 0.6m 的正方形来思考。

教学时,先引导学生观察图形,并根据问题把图形进行分解;再引导学生认真阅读教科书上的对话,并按照步骤列出算式;最后引导学生反思总结思维方法和解决这个问题的得失。


★课堂活动第1题,教学时可引导学生进行折、剪、拼等活动。将其中一个正方形对折两次(上下对折和左右对折),然后沿折痕剪成4个小块,很容易拼出另外两个图形。由此说明,这3个图中的阴影部分面积是相等的。但是,3个图形阴影部分的周长就不相等,第1个的周长是圆的周长与正方形周长的和,第2个是圆的周长加上正方形的2条边长,第3个只是圆的周长。

★第2题,教学时可以让学生先画一个示意图,明确花坛周围小路的面积是指哪一部分的面积(实际是一个同心圆环的面积)。让学生独立尝试解答,学生可以分步计算,先分别计算出大圆面积和小圆面积,再用大圆面积减去小圆面积就计算出了小路的面积;也可以用简便算法: $3.14 \times [(8+2)^2 - 8^2]$ 。在学生解答的基础上,教师就可以告诉学生,从大圆里减去一个小圆(同心圆),所剩下部分的形状叫作圆环,求圆环的面积就是用大圆面积减去小圆面积。


能不能从图形的整体上来考虑?



折叠部分的面积正好是圆面积减去正方形面积的差。



正方形的面积是4个直角三角形面积之和。



折叠后的正方形桌面面积:

$$0.6 \times 0.6 \div 2 \times 4$$

$$= 0.18 \times 4$$

$$= 0.72(\text{m}^2)$$

圆桌面的面积: _____

= _____


= _____

折叠部分的面积: _____


答:折叠部分的面积约是()m²。

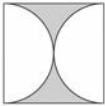

课 堂 活 动


1. 议一议。




3个正方形的边长相等。










这3个图中的阴影部分的面积有什么关系? 周长呢?




2. 求圆形花坛周围小路的面积。在小组内交流你的解决方法。




花坛的半径是8米。



花坛周围的小路正好2米宽。



 24

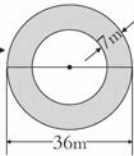
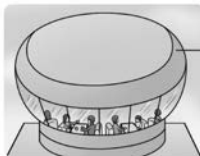
练习六

1. 太和村的田径场如下图所示：

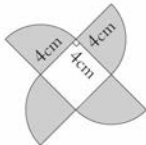


这个田径场的面积是多少平方米？

2. 旋转餐厅的直径为36m,旋转部分宽7m。旋转部分的面积是多少平方米？



3. 求图中阴影部分的面积。



每块阴影部分是扇形,4块阴影部分组成……

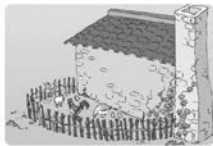
4. 一座雕塑的基座是圆形,半径为15m,在它的周围植上5m宽的环形草坪(如右图)。

(1) 草坪面积是多少平方米？

(2) 如果植 1m^2 草坪的成本为20元,那么植这块草坪的成本至少是多少元？



5. 用15.7m长的竹篱笆靠墙围一个半圆形鸡舍(如右图)。这个鸡舍的面积是多少平方米？



25

★练习六第1题的田径场占地面积就是一个圆加上一个长方形的面积。

★第2题首先要弄清楚“旋转部分就是圆环部分”,计算旋转部分的面积实际上就是计算圆环的面积。这里要注意把外圆和内圆的半径计算正确,才能保证把旋转部分的面积计算正确。

★第3题引导学生仔细观察图形,发现图中的阴影部分拼接起来就是一个半径4cm的圆。

★第4题第(1)问的环形草坪实际就是一个圆环,前面已经会解决了;第(2)问是一个解决单价、数量与总价的关系的问题。

★第5题要注意引导学生弄清楚15.7m是指半圆形鸡舍的哪一部分, $15.7=\pi r \neq 2\pi r$,这一点是解决好这个问题的关键。

第4节“整理与复习”是通过对“圆”这一单元知识的整理、方法的回顾与内容的复习,使知识内容更加条理化和系统化,有利于使学生巩固圆的有关知识,更熟练地解决与圆有关的实际问题,进一步发展空间观念。建议用2课时教学。第1课时教学单元整理,复习圆的认识、圆的特征,复习圆的周长与面积计算方法的推导,完成练习七第1~4题;第2课时重点教学运用圆的周长和面积计算公式解决实际问题,完成练习七第5~9题。

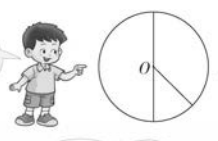
★单元知识整理时,可以先让学生通过阅读教科书、翻阅记录本等,自行对本单元的知识进行个性化的整理,在此基础上,教师在黑板上画出一个大大的圆,来引导学生按三部分进行梳理:一是如何画圆以及圆各部分的名称、直径与半径的关系;二是圆的特征,圆是对称图形,有无数条对称轴;三是周长和面积计算公式的推导,重点让学生回忆是怎样推导出圆的周长和面积计算公式的,再次对不完全归纳法、转化和极限的数学思想进行体验与感受。

★复习第1题时,一是让学生独立练习后,说一说是怎样画圆的,从而复习画圆的方法;二是说一说圆有什么特征,如何确定圆的对称轴;三是要结合计算后的交流,复习圆的周长、面积计算方法等。

★第2题是用圆的周长和面积的有关知识来解决生活中的实际问题。教学时,可以先让学生独立审题,然后让学生联系生活实际说一说,做一道铁箍需要多长的铁丝和做一个木盖至少需要多少木板分别是求圆的什么,再让学生独立解答。

整理与复习


这一单元里,我们学习了有关圆的知识。




圆的周长与直径有什么关系?怎样求圆的周长和面积?




我们是如何探究圆的面积计算公式的?



- 画一画,算一算。
 - 画一个圆,并用字母标出它的圆心和半径。
 - 画一个半径3cm的圆和圆的一条对称轴,再算出圆的周长和面积。
- 工人师傅给一个直径为50cm的木桶打一道铁箍,接头处要4cm,需要多长的铁丝?如果给这个木桶配一个木盖,至少需要多少平方厘米的木板?





求需要多长的铁丝,要先求圆的什么?



练习七

- 在圆中画出1条半径和1条直径,用字母标出圆心、半径、直径,再在这个圆中画出一个扇形。
- 判断下面图形中,哪些是轴对称图形?画出每个轴对称图形的1条对称轴。

 26

3. 纸风车的叶片尖端到中心的距离是12cm, 纸风车转动1周, 叶片尖端经过了多少厘米?



4. 填表。

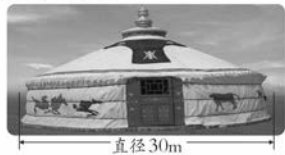
半径(cm)	直径(cm)	周长(cm)	面积(cm^2)
	26		
2			
		43.96	

5. 量得一张DVD光盘的周长是38cm, 如果要做一个正方形袋子装这张光盘, 那么这个正方形袋子的边长至少是多少厘米?(得数保留整数。)
6. 给一把圆形的扇子镶边, 共用去62.8cm长的布条。(接头忽略不计。)这把扇子的面积是多少平方厘米?
7. 小红家的菜板是圆形的, 直径是40cm。菜板面的面积是多少? 如果给菜板周围包一层铝皮, 需要多长的铝皮?
8. 游乐园里的圆形高空转椅的直径是10m。如果每隔3.14m装一个吊篮, 能装多少个吊篮?



9. 蒙古包的围毡上有插紧的3条围绳。

- (1) 搭下图那样的一个蒙古包, 这3条围绳共长多少米?(门的宽度忽略不计。)
- (2) 这个蒙古包占地多少平方米?



27

★练习七第1~4题是认识圆的特征和圆的半径、直径、周长、面积之间的关系问题, 这有利于学生牢固掌握圆的基础知识。第5~9题都是有所变化的题, 有利于学生综合利用所学的知识解决实际问题, 培养学生分析问题和解决实际问题的能力。

★第5题引导学生明白装光盘的正方形袋子的边长实际是光盘的直径(袋子的边长实际比光盘的直径略长一点), 这道题也就变成了知道圆的周长求直径的问题了。

★第6题引导学生明白布条的长就是圆形扇子的周长。这个问题也就变成了已知圆的周长, 求圆的面积的问题了。

★第8题引导学生分析这个问题所表达的意思。给高空转椅安装吊篮, 就是要把圆形高空转椅的周长每隔3.14m分成一段, 还要明白一个常识, 就是在圆形上分段, 段数就等于隔点数(这里就是吊篮数)。所以, 这个问题就变成了知道圆的直径, 计算圆的周长,

再把周长看成总数, 又知道每份长度, 求份数的问题了。

★第9题, 搭一个蒙古包至少需要多少米的围绳, 实际上就是求3个圆的周长之和。第(2)问就是计算圆的面积。

★数学文化“我国古代杰出的数学家——祖冲之”，虽然编排在单元末，但在教学时要结合圆周率的知识进行介绍。

该数学文化一是介绍了祖冲之的出生和籍贯，二是介绍了他从小勤奋好学的学习品质，三是介绍了他在数学上的成就，特别是对圆周率的研究所做的贡献。这个数学文化整体突出祖冲之是我国古代杰出的数学家，重点突出爱国主义教育、优秀传统文化教育和爱学习的教育，以增强学生的民族自豪感。

教学此部分时，不是要求单独作为一课时进行教学，而是要与圆周率的学习紧密结合。一是可以引导学生进行阅读，对教科书提供的内容阅读后提出自己的问题；二是结合“链接活动”引导学生通过上网查阅、图书查阅或访问老师等活动，对在阅读中提出的问题进行进一步了解，同时，了解更多的关于圆周率和祖冲之的知识；三是引导学生结合自己的数学学习遇到的困难开展适当的讨论，讨论如何勤奋努力、广泛阅读、激发兴趣，从而学好数学。



我国古代杰出的数学家——祖冲之



② 祖冲之从小勤奋好学，阅读了大量天文、数学方面的著作。他研究历代历法，亲自观测并进行了大量计算，发现了过去在历法上的错误。他33岁时，编制的《大明历》被收录在历史著作——《宋书》中，一直流传到现在。

① 祖冲之(公元429年~500年)，南北朝时期范阳郡道县(今河北涿水县)人。他是我国古代杰出的天文学家、数学家，同时还是一位在机械制造方面卓有成就的人。



指南车复原模型



③ 祖冲之在数学上著有《缀术》，其中有关精密圆周率的计算，是在三国时代的刘徽“割圆术”基础上，求出圆周率的值介于3.1415926和3.1415927之间，并得出圆周率的分数形式的近似值，为约率 $\frac{22}{7}$ 和密率 $\frac{355}{113}$ ，成为世界上最早把圆周率的数值推算到小数点后7位的科学家。1960年，苏联科学家将月球背面的一座环形山，命名为“祖冲之山”。



链接活动

查一查相关书籍和网站，你还知道祖冲之的其他成就吗？

综合与实践“读故事 学数学”采用“主题图+问题引导+活动拓展”的形式呈现。“主题图”引起实践的兴趣,作为情境引入;“问题引导”要求学生带着问题熟悉材料,合作研究、独立解决等;“活动拓展”将学生学习视野由课内引向课外,由一个问题引向多个问题。建议用1课时教学。

综合与实践

读故事 学数学

古代有一位公主叫狄多,她的王国发生叛乱后,就逃到了非洲。一天,她向当地的酋长雅布乞求一些土地,雅布酋长不想多给土地,就给了狄多一张犏牛皮,让公主用这张犏牛皮圈土地,圈多少就给多少。聪明的公主用这张犏牛皮圈得了很多土地,在这片土地上建立了拜萨(意为牛皮)城。

巧用牛皮。
如果用这张牛皮去覆盖土地,那太少了。
把牛皮变成尽可能长,才可以圈出更多的土地。

模拟圈地。

议一议 周长相等的长方形、正方形、圆,谁的面积最大?

算一算 如果狄多公主得到的那张犏牛皮能变成20000m长的牛皮条,可以圈得多少公顷土地?

想一想 如果充分利用雅布的土地边界线来圈,会不会圈得更多的土地呢?

活动拓展

- 你读过《曹冲称象》的故事吗?说说里面有哪些数学知识。
- 到图书室、网上再搜集一些故事,研究里面的数学知识。

29

★教学时可以分3个阶段进行,第一阶段,在校内组织学生集中理解本综合与实践的每一项具体要求,议一议每个部分要做些什么,可以怎样做,使学生对本综合与实践有一个全面的了解。第二阶段,由学生利用课余时间,在家里独立完成“活动准备”的任务。第三阶段,就是在课堂上集中完成教科书上提出的问题。

在教学时要注意以下问题。

一是整合学科资源。可以与语文、体育、品德与社会、科学等老师一起,搜集一些与数学有关的小故事。

二是培养学生收集信息的能力。通过对收集故事的途径和方法的指导和应用,学生在收集信息的过程中获得一种积极的体验,并对信息的收集感兴趣,也培养了学生收集信息的能力。

三是培养学生综合应用数学知识的能力。在学生所讲的数学故事里,要引导学生从不同角度去发现故事中所包含的数学问题,并在“活动拓展”中综合应用所学的数学知识。

四是培养学生与他人合作交流的能力。活动是按学习小组进行,在小组里要确定收集信息的途径、收集的内容,有分工、交流等,通过一系列的小组活动,使同伴之间相互协作、相互补充,使与他人合作交流的能力得到发展。



(四)单元教学资源

割圆术(cyclotomic method)是我国古代证明圆面积公式和计算圆周率的方法。

公元263年,由刘徽首先提出:当圆内接正多边形边数逐步增加时,其周长和面积分别逼近圆周长和圆面积。

按照这样的思路,刘徽把圆内接正多边形的面积一直算到了正3072边形,并由此而求得了圆周率为3.1415和3.1416这两个近似数值。这个结果是当时世界上圆周率计算的最精确的数据。刘徽对自己创造的这个“割圆术”新方法非常自信,把它推广到有关圆形计算的各个方面,从而使汉代以来的数学发展大大向前推进了一步。

刘徽在《九章算术注》中提出“割圆”之说,他从圆内接正六边形开始(见下图),每次把边数加倍,直至圆内接正96边形,算得圆周率为3.14或 $\frac{157}{50}$,后人称之为徽率。书中还记载了圆周率更精确的值 $\frac{3927}{1250}$ (等于3.1416)。刘徽断言“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体,而无所失矣”。其思想与古希腊穷竭法不谋而合,并证实比西方早1000多年。

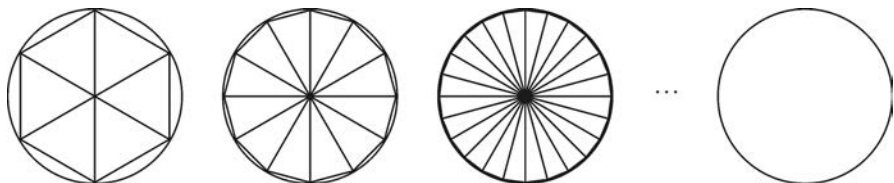


图1

以后到了南北朝时期,祖冲之在刘徽的这一基础上继续努力,终于使圆周率精确到了小数点以后的第7位。祖冲之运用刘徽割圆术的计算方法,继续分割到正12288边形,又用刘徽多边形面积公式,求得正24576边形的面积,再用刘徽圆周率不等式,取得8位有效数字即得祖冲之著名的圆周率不等式: $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 。祖冲之算得的圆周率准确到小数点后7位,保持了世界最准确圆周率的纪录达900年之久。

在刘徽提出割圆术和祖冲之拓展割圆术的过程中,都体现着证明圆面积公式的时候的两个重要思想,一个就是我们现在所讲的极限思想,另一个是无穷小分割。他们把与圆周合体的这个正多边形,就是不可再割的这个正多边形,进行无穷小分割,再分割成无穷多个以圆心为顶点、以多边形每边为底的小等腰三角

形,底乘半径为小三角形面积的两倍,把所有这些小等腰三角形的底乘半径加起来,应该是圆面积的两倍,也就是圆周长乘半径等于两个圆面积。一个圆面积等于半周乘半径,所以刘徽说“以一面乘半径,觚而裁之,每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂”。最后完全证明了圆面积公式,也就证明了“周三径一”的不精确。

刘徽在圆周率领域的贡献,不仅在于求得 $\pi=3.1416$,更重要的在于他创造了世界数学史上最精彩的割圆术:阿基米德割圆术虽然和刘徽割圆术一样用双向逼近,因而同样严谨完备,但远不如刘徽割圆术简洁;阿基米德用双归谬法推证圆面积,不如刘徽用极限论先进;托勒密割圆术和阿尔·卡西割圆术只是单向逼近,不如刘徽割圆术严谨;赵友欣割圆术和日本关孝和割圆术从正方开割,属于刘徽割圆术的变化,而且也是单向逼近。因此,刘徽割圆术虽然不是世界最早,却是数学史上最严谨、完备、简洁的割圆术。

附:割圆术的具体操作如下(见下图)。

从圆心 O 出发,向一个边(AB)作垂线,垂线延长与圆交于 C 点,连接 AC 和 BC 两条线,就成功分割圆的一部分,完成整个圆的分割之后如图1中第二幅图。并由此做下去,按照边数,将每部分的各三角形面积相加,得到的将会是一个无限趋近于圆面积的数,再由此面积与半径之间的比例关系,进行积分运算,就得到了圆周率 π 和公式 $S=\pi r^2$ 。其中用到的还有圆周率捷法、割圆术迭代公式等,这里就不做详细说明了。

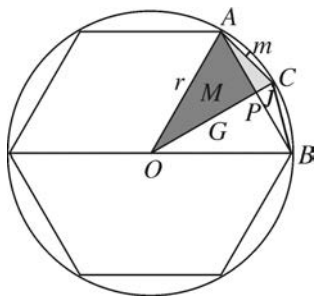


图2