

五 有余数的除法



(一) 单元教学目标

1. 结合实例认识除法竖式,正确书写除法竖式。
2. 结合具体情境,认识余数,理解有余数的除法。
3. 掌握有余数除法的横式和竖式的写法,正确笔算和口算有余数的除法。
4. 在理解与表达算理、算法的过程中培养学生的表达能力和思维能力。
5. 在应用有余数的除法解决简单实际问题的过程中感受数学与生活的联系。



(二) 单元内容分析

本单元是表内除法的延伸和扩展,也是多位数除以一一位数的基础与起点。学生学习表内除法时是用口诀求商并用横式写出运算的结果,现在要求学生用竖式进行书写。在学习表内除法竖式之后,安排有余数的除法,体现出数学知识内部的发展。本单元有余数的除法比较简单,除数与商都限定在一位数的范围内,是今后学习两、三位数除以一一位数,商是多位数的基础。学好本单元的内容,有利于整个小学阶段除法知识的学习。

本单元由“除法竖式”“有余数的除法”两部分构成。第一部分“除法竖式”,学习表内除法的竖式写法,为有余数的除法的学习打下基础。第二部分“有余数的除法”,理解余数的含义,懂得余数一定比除数小的道理;认识有余数的除法,并掌握有余数除法的横式和竖式写法。

[单元教学重点] 认识除法竖式和有余数的除法。教科书先安排“没有剩余”的情况,认识除法竖式,然后安排“有剩余”的情况,引出有余数的除法。除法竖式与有余数的除法均包括了“商、乘、减”三个步骤。要求学生结合具体的实例,弄清计算的步骤及每一个步骤所表示的意义,从而形成计算技能。

[单元教学难点] 理解“余数必须小于除数”。教科书中改变整除除法的除数,产生剩下不够分一份的情况,引出余数的学习。还设计探索活动,保持除

数不变,被除数逐一增加,余数逐渐变化,从变化中找到规律,将规律总结为一句话“余数必须小于除数”。教科书专门安排一个例题,辨析两个算式,归纳错误的原因,从而深化对“余数必须小于除数”的认识。



(三)单元教学建议

1.结合具体实例,充分认识除法竖式的特殊性。四则运算中,加法、减法、乘法的竖式的写法比较类似,而除法竖式的写法与之差别很大。第一是除号的写法,加法、减法、乘法中竖式的运算符号与横式相同,而除法中横式是“ \div ”,竖式则是“ $\overline{)}$ ”。第二是被除数、除数、商的位置。竖式除法不像加法、减法、乘法那样按从上到下的顺序书写,而是要把被除数写到“ $\overline{)}$ ”里面,除数写到“ $\overline{)}$ ”左边,商写到“ $\overline{)}$ ”上面。第三是计算过程步骤更多,先求商(用口诀求商),再求积(除数与商相乘),最后求差(被除数减去除数与商的积)。因此必须以实例为基础,引导学生弄清竖式除法计算的步骤,理解每一步计算所表达的意义。

2.通过操作、观察等活动,理解“余数必须小于除数”。调用学生已有的“分一分”的经验,用学具操作来解决“分18个圆片”的简单问题。随着除数所表示的每份数的改变,出现了两种情况,一种是刚好分完,没有剩余(即整除);另一种是分以后还有剩余,产生了余数(即有余数的除法)。

在此基础上,保持除数不变,改变被除数。学生列出一系列的算式,观察这组除数不变,被除数依次加1的算式,发现余数变化的规律:余数最大也比除数少1。从而归纳出“余数必须小于除数”的结论。

至于为什么“余数必须小于除数”,可以通过两种分物品的实际操作来理解。一种是按每份数来分,剩下的不够分一份。另一种是按份数来分,剩下的不够每份分一个。这两种情况下,都会产生余数,这就是它为什么小于除数的道理。

3.在理解算法与算理过程中,培养学生的表达能力与思维能力。除法竖式与有余数除法的学习都是在解决简单实际问题的过程之中进行的。在实际情境中,每一步都能用分物品的具体数量来体现。被除数是要分的数量,除数是分的标准。如果以除数表示每份数为例,那么商就是分得的份数,商与除数的积就是分出的数量。如果被除数减积的结果为0,那就表示刚好分完,没有剩余;如果被除数减积的结果不为0,那就表示没有分完,还有剩余,即余数。教师要引导学生理解

每一个计算步骤的实际意义,并用学生自己的语言来表达。在此过程中,不仅能使学生明确算法与算理,更重要的是提高了学生语言表达的准确度与清晰度。

在探索“余数必须小于除数”时,让学生将解决问题的横式有序地排列起来,观察这些算式中隐含的规律。学生从被除数、除数、商、余数这四个维度进行思考,找出商固定时,余数部分的变化是没有余数、余数为1、余数为2……余数比除数少1,如果被除数再增加,那么商增加1,余数部分又会重复这样的变化,由此推导出“余数必须小于除数”的结论。在这样的探索过程中,学生思维的有序性、概括性都得到了提高。

本单元安排了5个例题,3个课堂活动和1个练习。建议用4课时教学:第1课时教学例1、例2,完成第71页课堂活动和练习十四第1题。第2课时教学例3、例4,完成第72页课堂活动和练习十四第2,3题。第3课时教学例5,完成第73页课堂活动和练习十四第4~6题。第4课时是综合练习及应用,完成练习十四第7~10题及思考题。



五 有余数的除法

12枝花,平均插在3个花瓶里,每个花瓶插几枝?

刚好分完,没有剩余。



$$12 \div 3 = 4 \text{ (枝)}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdots \cdots \text{商} \\ \text{除数} \cdots \cdots 3 \overline{) 12} \cdots \cdots \text{被除数} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

还可以写成竖式。



答:每个花瓶插4枝。

试一试

$$24 \div 8 = \square$$

$$\begin{array}{r} \square \\ 8 \overline{) 24} \\ \underline{\square \square} \\ \square \end{array}$$

$$42 \div 6 = \square$$

$$\begin{array}{r} \square \\ 6 \overline{) 42} \\ \underline{\square \square} \\ \square \end{array}$$

每只小猴分5个桃,这些桃可以分给几只小猴?

$$45 \div 5 = 9 \text{ (只)}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \overline{) 45} \\ \underline{45} \\ 0 \end{array}$$

45……5乘9的积
0……没有剩余



商为什么要写在个位上?



答:可以分给9只小猴。



70

★例1是按份数分且没有剩余的问题,学习表内除法的竖式。

(1)学生用12个学具代替12朵花,动手分一分。然后用以前学过的表内除法知识写出横式,并复习除法算式各部分的名称。

(2)教师介绍表内除法竖式的书写过程。首先讲清除法竖式中,被除数、除数、商的位置。然后结合分学具的过程来初步理解竖式除法计算的三个步骤,尤其是与横式相比多出的两步:“乘”的结果表示分出了12朵,“减”的结果为0表示刚好分完了,没有剩余。

(3)试一试中告知了除法竖式里被除数与除数,用方格确定商、乘、减这三次运算结果的位置,帮助学生强化竖式除法的写法与计算步骤。

★例2是按每份数分且没有剩余的问题,进一步学习表内除法的竖式写法。

(1)以解决分桃的实际问题为情境,强调商的位置,明确指出除数与商的积写在被除数的下面;被除数减积的计算与以前学过的竖式减法相同。

(2)强调桃刚好分完,没有剩余。竖式中被除数减去除数与商的积,所得的结果正好为0。建立两者的对应关系,让学生深入理解这里的“0”所代表的意义,同时也为下节课出现分物品有剩余产生余数做铺垫。

★课堂活动第1题是让学生把表内除法的横式写成竖式。

★第2题以解决问题的形式出现。三个表内除法竖式计算体现出“由扶到放”循序渐进的过程。

★例3是按每份数分的问题。理解余数和有余数除法的意义。

(1)学生进行两次操作活动。第1次正好分完,第2次有剩余。对第2次分得的结果用表内除法的知识不能解决,这就产生了学习新知的需求。

(2)由“剩下的4个不够分1份”引出“余数”和“有余数的除法”的概念。此处对余数与有余数除法的认识主要结合具体的操作过程来进行,不宜进行抽象的算法描述。

(3)引导学生明确有余数除法横式的写法,介绍横式中余数的写法和算式的读法。提醒学生注意横式中商与余数后面的单位。

(4)试一试是强化对“余数必须小于除数”的理解。

①结合分圆片的过程,学生自己写出一系列的除法算式的横式,重点观察余数。发现余数的变化是有规律的,没有余数(0)、余1、余2……余6,然后重复上一组的变化,由此推导出“余数必须小于除数”的结论。

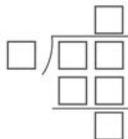
②学生观察到余数从6变到0(没有余数)时,商增加了1。教师引导学生思考原因“剩下的如果是7,又够分1份了,所以商增加了1,就没有余数了”,从而理解“余数必须小于除数”。

课 堂 活 动

1. 我说横式,你写竖式。



2. 有36颗糖,如果每袋装4颗、6颗、9颗,各可以装几袋?
(先说说用竖式怎么算,再用竖式算一算。)



3. 拿出18个小圆片分一分,填一填。



(1)每人分6个,可以分给()人。

$$18 \div 6 = 3(\text{人})$$

刚好分完。

(2)每人分7个,可以分给()人,还剩()个。

$$18 \div 7 = 2(\text{人}) \cdots \cdots 4(\text{个})$$



剩下的4个不够分1份。

余数

试一试

每人分7个,拿19个分一分。可以分给几人? 还剩几个? 拿20个、21个、22个……分一分,你有什么发现?

余数必须小于除数。

4 平均每筒可以装几个？还剩几个？



$$57 \div 9 = \underline{\quad} (\text{个}) \cdots \cdots \underline{\quad} (\text{个})$$

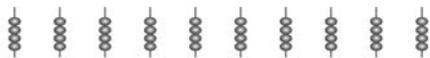
$$\begin{array}{r} 6 \\ 9 \overline{) 57} \\ \underline{54} \\ 3 \end{array}$$

用竖式算。

答：平均每筒可以装()个，还剩()个。

课 堂 活 动

分一分，填一填。



(1) 每人分2串，可以分给()人。

$$\underline{\quad} \div \underline{\quad} = \underline{\quad} (\text{人})$$

(2) 每人分3串，可以分给()人，还剩()串。

$$\underline{\quad} \div \underline{\quad} = \underline{\quad} (\text{人}) \cdots \cdots \underline{\quad} (\text{串})$$

(3) 每人分4串，可以分给()人，还剩()串。

$$\underline{\quad} \div \underline{\quad} = \underline{\quad} (\text{人}) \cdots \cdots \underline{\quad} (\text{串})$$

(4) 每人分6串，可以分给()人，还剩()串。

$$\underline{\quad} \div \underline{\quad} = \underline{\quad} (\text{人}) \cdots \cdots \underline{\quad} (\text{串})$$



72

★例4是按份数分的问题。用竖式计算有余数除法，并理解竖式中各部分的含义。

(1) 先用乘法口诀求商。看除数9想，六九五十四，比57小一点，所以商6。也可以想，57里面最多有多少个9。这一步是有多余数除法的难点。

(2) 再进行竖式计算。着重说明从被除数中减去已装的数，剩下的就是余数。

(3) 引导学生思考余数3应写在竖式的什么位置。

(4) 对比例4与例2的竖式，总结有余数除法竖式计算的步骤是“商，乘，减”。

★课堂活动“分一分，填一填”是用横式表示按每份数分的情况，可以用学具操作或者画图。

(1) 把10串糖葫芦按每份数分，分了4次，分别是按每份2串，每份3串，每份4串，每份6串分。学生观察4次分的情况，总数都是10，由于每份数不相同，分的结果也不相同，有的正好分完，有的不能全部分完，剩余一些不能继续分。进一步深化对余数的理解。

(2) 学生用除法横式表示4次分的结果，进一步熟悉有余数除法的横式的书写。

★例5对比正确与错误的算式,理解“余数必须比除数小”。

(1)学生对两个算式进行辨析,讨论哪个算式是正确的,哪个算式是错误的,并分析原因。

(2)结合分物品的经验,解释余数表示剩下的不够继续分。因此“余数必须比除数小”。

(3)学生将错误的算式改正,在改正的过程中,进一步掌握求商的方法。

(4)试一试是练习有余数除法的竖式计算。在计算练习中再次强化对“余数必须比除数小”的理解,掌握有余数除法的竖式计算方法。

★课堂活动是改正有余数除法中的常见错误。

(1)求商是教学有余数除法的难点。如果商小了,余下的数中还包含了1个除数,这种情况的处理方式是把商改大,使之没有余数或者余数小于除数,符合“余数必须小于除数”的要求。如果商大了,就会出现积大于被除数的情况,这种情况的处理方式是把商改小。

(2)学生自己分析这4个竖式,从商的大小、余数的大小、商的位置等方面说出错误的原因。要求尽量用简明、清晰的语言进行表达,在表达的过程中提高对有余数除法计算方法的熟练程度。

★练习十四的第1题是复习表内除法。要求学生口算出得数,还可以选择其中的几个算式让学生写出竖式。

5 计算。 $50 \div 6 = \underline{\quad} \dots \underline{\quad}$

我这样算。
$$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \overline{) 50} \\ \underline{42} \\ 8 \end{array}$$

我这样算。
$$\begin{array}{r} 8 \\ 6 \overline{) 50} \\ \underline{48} \\ 2 \end{array}$$

议一议 哪位同学的计算是正确的?为什么?

试一试 $4 \overline{) 27}$ $7 \overline{) 58}$ $9 \overline{) 80}$

课 堂 活 动

说说错在哪里,再改正。


$$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \overline{) 49} \\ \underline{42} \\ 7 \end{array}$$
 改正:
$$\begin{array}{r} 6 \\ 4 \overline{) 28} \\ \underline{24} \\ 4 \end{array}$$
 改正:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8 \overline{) 56} \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$
 改正:
$$\begin{array}{r} 2 \\ 9 \overline{) 17} \\ \underline{18} \\ 1 \end{array}$$
 改正:

练 习 十 四

1. 口算。

$48 \div 8 =$	$56 \div 7 =$	$27 \div 9 =$	$81 \div 9 =$
$32 \div 4 =$	$45 \div 9 =$	$36 \div 6 =$	$72 \div 8 =$

73 

2. 卡片上最大能填几?



$\square \times 6 < 57$



$\square \times 7 < 43$



$\square \times 5 < 38$



$\square \times 4 < 31$



$\square \times 8 < 26$



$\square \times 9 < 60$

3. 用竖式计算。

$26 \div 4$

$17 \div 3$

$80 \div 9$

$37 \div 5$

$62 \div 7$

$70 \div 8$

$31 \div 6$

$19 \div 2$

4. 直接写出商和余数。

$25 \div 8 = \square \cdots \square$

$36 \div 5 = \square \cdots \square$

$64 \div 9 = \square \cdots \square$

$29 \div 6 = \square \cdots \square$

$49 \div 8 = \square \cdots \square$

$52 \div 7 = \square \cdots \square$

5. 有48人去租船。



(1) 全部坐小船, 可以坐满几只?

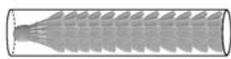
$\square \div \square = \square (\quad)$

(2) 全部坐大船, 可以坐满几只? 还剩多少人?

$\square \div \square = \square (\quad) \cdots \square (\quad)$

6. 有12个羽毛球, 平均分

给5人, 每人分多少个?



还剩多少个?

$\square \div \square = \square (\quad) \cdots \square (\quad)$



74

★第2题帮助学生掌握除法试商的方法。引导学生看懂题目的要求。如 $\square \times 6 < 57$, 看已知数6想六()五十几, 比57小一点, 因为六九五十四, 比57小一点, 所以卡片上最大能填9。或者想: 几与6相乘的积最接近57且小于57。

★第3题是用竖式计算有余数的除法。学生独立完成, 在练习过程中掌握有余数除法竖式的书写格式与计算方法。

★第4题是巩固有余数除法的横式写法、读法。学生直接把商和余数填出来, 对比余数与除数, 进一步强化“余数必须小于除数”。

★第5题是解决按每份数分的实际问题。对比没有余数与有余数的算式, 结合具体的情境来理解没有余数和有余数除法的意义。

★第6题是解决按份数分的实际问题, 利于学生深入理解余数的意义。根据学生的掌握程度可以用学具操作分

的过程, 也可以画出分的结果, 还可以直接写出横式。写出有余数除法的横式后, 注意单位的填写及带上单位后横式的读法。

★第7题是根据余数对算式进行分类的练习。学生自己看懂题目的要求，然后按自己的方法完成。对有困难的学生作提示：先要计算出每个算式的得数，再根据余数来连线。

★第8题是解决按每份数分的实际问题。题目采取图文并茂的形式，学生要能看图说出每件衣服钉6颗扣子这一数学信息，然后结合其他信息，列式解答此题。

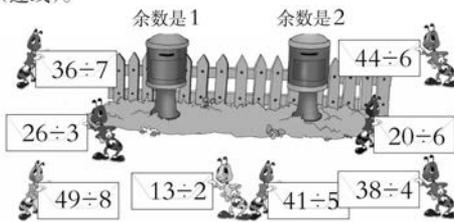
★第10题将按份数分与按每份数分的两种情况在同一情境下呈现。学生根据信息，灵活选择有余数除法的相关知识进行解答。对比两种情境的有余数除法，无论是剩下的不够分一份，还是剩下的不够每份分一个，都是不能继续分了，加深对余数的理解。

★思考题的原型是“中国剩余定理”，这里主要引导学生用列举法来思考。

(1)方法一：2个2个地分，剩下1个的数有3,5,7,9,11…3个3个地分剩1个的数有4,7,10,13,16…对比两列数，相同的是7。所以这堆苹果可能有7个。由于题目问的是可能的个数，所以答案不唯一，如果学生列举的数更多一些，那么可以找到13个、19个…

(2)方法二：2个2个地分，剩下1个的数有3,5,7,9,11,13…在这些数中，3个3个地分剩1的数有7,13…

7. 送信(连线)。



8. 钉扣子。



22颗扣子，能钉多少件上衣？还剩几颗？

9. 二年级48人分组跳绳。

每5人1组，可以分成几组？还剩几人？



10. 有62盏日光灯。

如果每间教室装7盏，可以装几间教室？还剩几盏？



一堆苹果2个2个地分剩1个，3个3个地分也剩1个，这堆苹果可能有多少个？



思考题



(四)单元教学资源

1. 整除与有余数的除法

在整数范围内,对于任意两个整数 a 和 $b(b \neq 0)$,如果存在一个整数 q ,使得 $a=bq$,就说 a 能被 b 整除(或 b 能整除 a),我们用 $b|a$ 表示这种关系。在整数范围内,“整除”与“除尽”的说法是通用的,也可以说 a 能被 b 除尽。

在整数范围内,对于任意两个整数 a 和 $b(b \neq 0)$,要求两个整数 q 和 r ,使得 $a=bq+r(0 \leq r < |b|)$ 。这样的运算叫做带余除法。通常记作 $a \div b = q(\text{余 } r)$,或 $a \div b = q \cdots r$,其中 q 是不完全商, r 是余数。当 $r=0$ 时, $a=bq$,即 $b|a$,是带余除法的特殊情况。

小学阶段把带余除法叫有余数的除法,有余数除法各部分的关系如下:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) 被除数=除数 \times 商+余数 | (2) 除数=(被除数-余数) \div 商 |
| (3) 商=(被除数-余数) \div 除数 | (4) 余数=被除数-除数 \times 商 |

有余数的除法中有一些重要的性质:

(1) 如果 a, b 除以 c 的余数相同,那么 a 与 b 的差能被 c 整除。例如,17与11除以3的余数都是2,那么 $17-11$ 能被3整除。

(2) a 与 b 的和除以 c 的余数等于 a 与 b 分别除以 c 的余数之和(或这个余数之和除以 c 的余数)。例如,23,16除以5的余数分别是3和1,所以 $(23+16)$ 除以5的余数等于 $3+1=4$ 。注意:当余数之和大于除数时,所求余数等于余数之和再除以 c 的余数。例如,23,19除以5的余数分别是3和4,所以 $(23+19)$ 除以5的余数等于 $(3+4)$ 除以5的余数。

(3) a 与 b 的积除以 c 的余数等于 a, b 分别除以 c 的余数之积(或这个余数之积除以 c 的余数)。例如,23,16除以5的余数分别是3和1,所以 (23×16) 除以5的余数等于 $3 \times 1=3$ 。注意:当余数之积大于除数时,所求余数等于余数之积再除以 c 的余数。例如,23,19除以5的余数分别是3和4,所以 (23×19) 除以5的余数等于 (3×4) 除以5的余数。

性质(2)(3)都可以推广到多个自然数的情形。

2. 中国剩余定理

公元4世纪,我国古代数学名著《孙子算经》载有一道数学问题:“今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二。问物几何?”翻译成数学语言就是:求正整数 N ,使 N 除以3余2,除以5余3,除以7余2。这个问题被称为“孙子问题”。

“孙子问题”的实质是解一次同余式组。如何求解呢?《孙子算经》中记载了非常有效的巧妙解法。16世纪,数学家程大位在所著的《算法统宗》里把这种解法用歌诀形式表述出来“三人同行七十稀,五树梅花廿一枝,七子团圆正半月,除百零五便得之”,这就是“孙子歌”。用现代的数学语言解释解题过程: $[3, 5]=15$, $[3, 7]=21$, $[5, 7]=35$, $[3, 5, 7]=105$, $15 \equiv 1 \pmod{7}$ (意思是15除以7的余数是1), $21 \equiv 1 \pmod{5}$, $35 \times 2 \equiv 1 \pmod{3}$, 根据余数调整为 $15 \times 2 + 21 \times 3 + 70 \times 2 = 233$, $233 \equiv 23 \pmod{105}$, 所求数为23。

13世纪数学家秦九韶把此问题的研究扩大到一般情况,并发明了“大衍求一术”来解一次同余组,这一成果记录在他所著的《数书九章》中。此成果得到世界公认,世界数学史上一直称求解一次同余组的剩余定理为“中国剩余定理”。